# أثر استخدام أسلوب البرهان بدون كلمات في التفكير الرياضيّ والتحصيل لدى طلبة المرحلة الثانويّة

# Effect of the Use of Proof without Words on Secondary Students' Mathematical Thinking and Achievement

**عدنان العابد**

**Adnan Abed**

قسم المناهج والتدريس، كليّة العلوم التربويّة، الجامعة الأردنيّة، الأردن

بريد إلكتروني: a.abed@ju.edu.jo

تاريخ التسليم: (٢٠١١/٤/٣)، تاريخ القبول: (٢٠١٢/٢/٢٣)

**ملخّص**

بحثت الدراسة في أثر استخدام أسلوب "البرهان بدون كلمات" في التفكير الرياضيّ والتحصيل لدى طلبة المرحلة الثانويّة، واستُخدِمت في الدراسة أداتان هما: اختبار التفكير الرياضيّ، وتضمّن (١٥) فقرة، بأبعاده الثلاثة: الاستدلال العددي واكتشاف قاعدة النمط والاستدلال غير اللفظي، والاختبار التحصيلي وتضمّن (٢٠) فقرة. واستُخرجت دلالات الصدق والثبات لهاتين الأداتين. تكوّن أفراد الدراسة من (١٥٣) طالبا وطالبة من طلبة الصف الأول الثانويّ العلميّ في مدارس التربية والتعليم في نابلس، وقد توزّع أفراد الدراسة في مجموعتين إحداهما تجريبية (٧٦ طالباً وطالبة)، والأخرى الضابطة (٧٧ طالباً وطالبة). أسفرت نتائج الدراسة عن فروقٍ دالةٍ إحصائياً بين متوسطات درجات الطلبة سواء في اختبار التفكير الرياضيّ أو الاختبار التحصيلي، ولصالح المجموعة التجريبية في كل مرة. وخلصت الدراسة إلى عددٍ من التوصيات في ضوء ما أسفرت عنه من نتائج.

**Abstract**

The present study aimed at investigating the use of the “proof without words” in teaching math on students' mathematical thinking and achievement. A scale of mathematical thinking was developed in this study. The scale consisted of 15 items, distributed over 3 dimensions: numerical reasoning, discovery of the pattern rule, and non-numerical reasoning. An achievement test comprising 20 items was also used.

Validity and reliability of the two instruments were established. The subjects of this study were 153 first-secondary scientific stream students, selected from basic government schools in Nablus. Subjects were divided into two groups: an experimental group (76 students) and a control one (77 students). There were statistically significant differences between the mean scores of the two groups with regard to their mathematical thinking, and also with regard to their achievement in favor of the experimental group in each time. A number of recommendations were made in the light of these findings.

**خلفيّة الدراسة وأهميتها**

يشغل البرهان حيّزاً مهمّاً في الرياضيات، ويمثّل ركناً رئيساً من عمليات الاستدلال. ونظراً للأهمية التي يحظى بها البرهان في مجال الرياضيات، فإن اكتساب الطالب القدرة على إتقان أساليب البرهنة الرياضية بات ضرورة ملحّة؛ إذ إن الرياضيات التي تعتمد في عرض مادتها على أسسٍ منطقيةٍ فكريّةٍ، إنما يشكّل فهم أساليب البرهنة الرياضية وتوظيفها عاملاً مساعداً لدى كل من المعلّم والمتعلّم على حد سواء بغية إيجاد الحلول الرياضية بصورة مختصرة وميسّرة (عفانة، ٢٠٠٢). ولذلك عُدّ البرهان الرياضي، ومنذ القرن التاسع عشر، كواحدٍ من أهم الخصائص المميّزة لمبحث الرياضيات (Davis, & Hersh, 1981)، كما عدّه البعض "المادة التي تعمل على ربط كافة مناحي الرياضيات بعضها ببعض" (Dunham, 1994, p.15). بينما ذهب "وا" إلى اعتبار البرهان بمثابة "أحشاء" الرياضيات guts of mathematics ، مضيفاً القول "أن من يريد تعرّف ماهيّة الرياضيات وما تدور حوله، عليه أن يتعلّم مهارة البرهان أو -على أقل تقدير- ما يعنيه البرهان في الرياضيات" (Wu, 1996, p. 222)، كما أردف القول "أنه ومن خلال البرهان الرياضي يتعلم الطلبة كيف يميزون بين الصحيح وما قد يبدو صحيحاً" (p. 224). ولذلك فإن من التربويين من يدعو إلى "أن يمثّل البرهان المكوّن الرئيس لمناهج الرياضيات المدرسية؛ فهو أساس مبحث الرياضيات" (Ball, Hoyles, Jahnke, Movshovitz-Hadar, 2002, p.1; Jones, 1997, p. 23).

وعليه، فقد يبدو من الملاحظ تجدّد الاهتمام "العالمي" بالبرهان الرياضي في مناهج الرياضيات المدرسية (Brown, Stillman, Scharz, Kaiser, 2008, p. 85)، أو ما أشار إليه بعضهم "التأكيد على تجدّد الاهتمام بالبرهان الرياضي من خلال تضمينه في مناهج الرياضيات المدرسية عبر مراحل الدراسة المختلفة وفي شتى دول العالم" (Hanna & de Villiers, 2008, p. 1).

والبرهان الرياضي يساعد الطلبة على التعلّم، وييسّر لهم التطور العقلي (علي، ١٩٩١)، كما أن دراسة البرهان الرياضي قد تعمل على تطوّر التفكير الناقد لدى الطلبة (Reid, 2005)،

وفـي الوقت ذاتـه قـد يكـون البرهـان الرياضـي أداة مـن الأدوات الفاعلـة فـي تنميـة البـصيرة (insight) والتواصل الرياضي (Varghese, 2009b, p. 1).

ولأهميتـه البالغـة فـي تعلّـم الرياضـيات وتعليمهـا، فقـد عـدَّ المجلـس القـومي لمعلّمـي الرياضيات في أمريكا (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM) البرهـان الرياضـي، كواحـدٍ مـن المعـايير الرئيـسة للرياضـيات المدرسـية للعـام ٢٠٠٠ (Principles and Standards for School Mathematics)، وجاءت هذه المعايير متضمّنة القول "بضرورة القدرة على البرهان لفهم الرياضيات" (NCTM, 2000, p. 56).

والبرهان ـ بصفة عامة- هو "أية مناقشة أو تقديمٍ لشواهد تقنع شخصاً ما بقضية معيّنة" (بل، ١٩٩٤، ص١٤١)، أو هو "نوع من المعالجة التي تهدف إلى الإقناع بصحة قضية ما، من خلال تقديم أدلّة تدعو إلى الاقتناع إلى حد التأكّد من صحة تلك القضية" (عبيد والمفتي وإيليا، ٢٠٠٠، ص ١٢٩). أو هو "تتابع من العبارات المترابطة موجّهة نحو إثبات صحة نتيجة معينة بواسطة مجموعة مقبولة ومعترف بها من اللامعرّفات والتعريفات والمسلّمات والعبارات السابقة برهانها بما في ذلك مسلّمات ونظريات المنطق" (إبراهيم، ١٩٨٨، ص٥١).

وللبرهان الرياضي ثلاث خطوات رئيسة تتمثّل في: تحليل المعطيات، وتحديد المطلوب، وإيجاد العلاقة بين المعطيات والمطلوب. والبرهان الرياضي ليس كغيره من البراهين فهو "ديـاليكتيكي" (dialectic) أي منطقي يعتمد المناقشة الجدليّة الحواريّة (Almeida, 1995; Bell, 1976).

وعلى أية حال، فإن "البرهان" ليس مقصوراً على برهنة النظريات والتعميمات الرياضية فحسب، بل هو مفهومٌ أساسٌ في الفكر البشري وفي مجالات الخبرة والتعلّم بصفة عامة، وهو مفهوم جوهري ومركزي في دراسة الرياضيات بصفة خاصة (عبيد وآخرون، ٢٠٠٠؛ الكرش، ١٩٩٩). ولعلّ هذا يلتقي مع ما يشير إليه "ستين" في "أن غالبية الناس يفهمون البرهان على أنه تقديم الدليل الكافي للإقناع" (Steen, 1999, p. 274).

أما في الرياضيات، فقد حدّد "نث" وظائف البرهان في: التأكد من صحة عبارة معطاة، وتوضيح سبب صحة العبارة، والتواصل عبر المعرفة الرياضية، والكشف عن رياضيات جديدة والإبداع فيها، ووضع العبارات في نظام بديهي (Knuth, 2002, p. 63).

هذا وتتعدّد تصنيفات البراهين الرياضية وأنواعها، كما تتعدّد طرائقه واستراتيجياته، فهناك تصنيف "ويتمان ومولر" الذي يميّز بين ثلاثة أنواع رئيسة من البرهان، هي: البرهان الاستدلالي الشكلي، والبرهان التجريبي، والبرهان التوضيحي لمحتوى المادة (Wittmann, & Muller, 1988)، أو تصنيفات البرهان المباشر وغير المباشر (بلّ، ١٩٩٤، عبيد وآخرون، ٢٠٠٠). أو التصنيفات القائمة على طبيعة الاستدلال (Duval, 1991)، أوغيرها من أنواع البراهين وطرائقه (Balancheff, 1988; Blumm & Kirsch, 1991; Hanna, 1989; Harel & Sowder, 1998).

وعلى الرغم من تنوّع الطرائق والاستراتيجيات والأهمية التي يحظى بها البرهان الرياضي، إلاّ أن الطلبة لا يزالون يعانون من صعوبة في فهمه وتطبيقه (Jones, 1997; Varghese, 2009a)، وهو ما قد يؤثر سلباً على قدرتهم في تحديد أهداف البرهان الرياضي ووظائفه (Varghese, 2009a, p. 51). ولعلّ هذه الصعوبة في استيعاب البرهان الرياضي والقصور في فهم معانيه قد يكون مردّها "التدريس الاعتيادي الذي لا يفلح في الوصول بالطلبة إلى المعنى التعليمي المعرفي للبرهان الرياضي" (Brown et al., 2008, p. 85)، الأمر الذي يستدعي "البحث في طرائق وأساليب أكثر دلالة ومعنى في تدريسه" (Jones, 1997, p. 24)، أو ما يدعو إلى تحرّي "استراتيجيات أكثر فاعلية في تعزيز القدرة لدى الطلبة على البرهنة الرياضية" (Ball et al., 2002, p. 2).

وعطفاً على ذلك، فقد يبدو "البرهان بدون كلمات" (Proof without words) كأسلوبٍ، واحداً من هذه الأساليب الذي قد يجد له مكاناً لدى الباحثين والتربويين لتحرّي دلالاته ووظائفه، أو ما قد يفيد الطلبة وييسّر عليهم تناول البرهان الرياضي وتوظيفه وتطبيقه في خبرات لاحقة (Alsina & Nelsen, 2010; Nelsen, 1993, 2000).

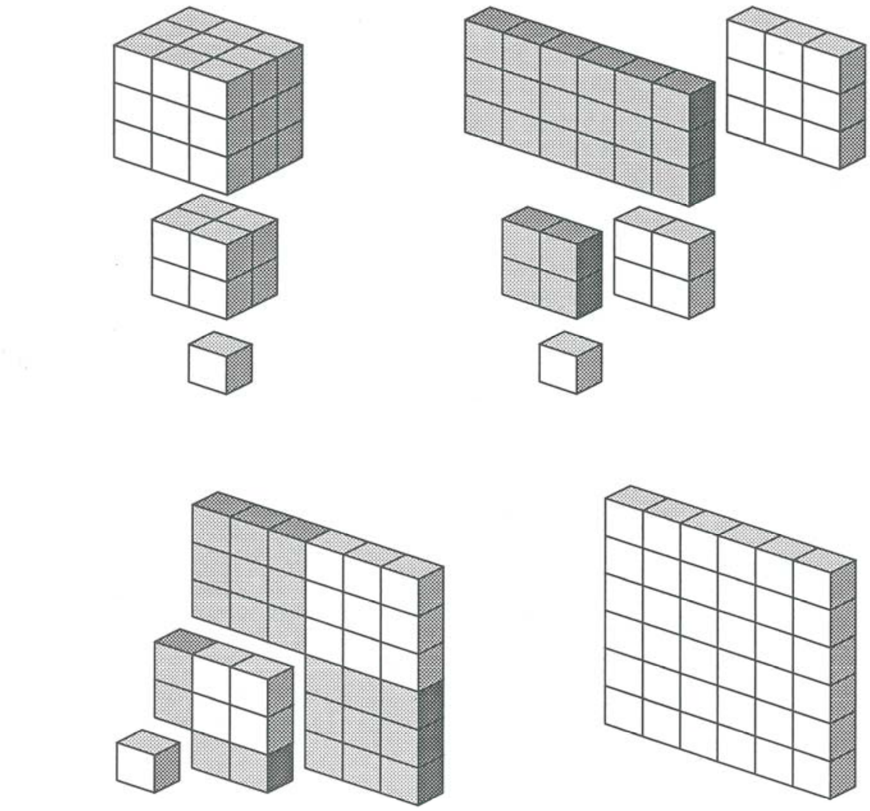
و"البرهان بدون كلمات" هو مجموعة الصور أو الرسوم البيانية والتخطيطية التي تساعد الطالب على التعرّف على سبب صحة عبارة ما، وكيف يمكن السير في خطوات برهنة صحة هذه العبارة (Alsina & Nelsen, 2010; Nelsen, 1993, 2000). أو هو ما يمكن تعريفه بأنه "البرهان الذي يعتمد العناصر البصرية، ودون أية تعليقات تتبعها" (Barile, 2011, p.1).

ويبدو أن هذه التعريفات تنسجم مع ما أشار إليه التربويون ومنهم "كاردنر" من أنه لن يكون أكثر فاعلية وتأثيراً في فهم بعض العبارات الرياضية من الرسوم والمخططات البيانية الجيدة، مضيفاً القول: أنه وفي بعض الحالات إذا ما أُلحق رسم بياني أو توضيحي بسيط ومعبّر ببرهان غامض، فإن وضوح هذا البرهان ومدى التأكد من صحته يمكن تحقيقه وإلى حد كبير بلمحة بصر أو بنظرة عاجلة (Gardner, 1975)، وهو ما جيَّره "مانين" إلى "البرهان بدون كلمات"، مضيفاً: أن الرسوم البيانية أو الصور التوضيحية قد تلعب أدواراً مختلفة في الرياضيات، فإذا أُحسن رسمها وقراءتها فإن هذا الرسم قد يدعم التحقق من البرهان أو قد يصل إلى حد أن يكون هو بمثابة البرهان نفسه (Maanen, 2006, p. 97)، ودراسة "مانين" هذه هي - في واقع الأمر- ليست بحثاً تجريبياً، بل هي "مقال" لمتخصّصٍ له رأيٌ نافذٌ في أسلوب "البرهان بدون كلمات"، وقد عوَّل عليه الباحث، وأفاد منه، في دراسته هذه التي اعتمدت المنحى التجريبي في منهجيتها. هذا، وقد أضاف بعض التربويين -علاوة إلى ما جاء به "كاردنر" أو "مانين"- أن الرسومات الرياضية (mathematical drawings) قد يكون لها دور واضح في تيسير فهم الأفكار والحجج المنطقية والبراهين الرياضية (Alsina & Nelsen, 2006).

وكمثالٍ يوضح "البرهان بدون كلمات" معتمداً الرسم الرياضي للعبارة الرياضية، وهي مما ورد في وحدة "المتسلسلات والمتتاليات":

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + ن^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + ن)^2$$ ،

هو ما يلي:



و"البرهان بدون كلمات" بمخططاته التوضيحية ورسوماته البيانية للعبارات الرياضيّة ليس نتاج عهد قريب، بل هو تراكم حضاري، وإسهامات مبكّرة من الإغريق والصينيين القدماء، ثم من العرب في بدايات القرن العاشر الميلادي، والرومان (Alsina & Nelsen, 2010; Nelsen, 1993, 2000). بيد أن "البرهان بدون كلمات" يجد له الآن صدىً واسعاً في العديد

من المنشورات والمجلات العلمية، ولدى المواقع العلميّة في شبكة الإنترنت، كما يجد دعوة إلى تطبيقه وتوظيفه عبر موضوعات الرياضيات المتنوعة، وفي مراحل الدراسة المختلفة (Alsina & Nelsen, 2010; Barile, 2011; Khattri, 2008; Nelsen, 1993, 2000; Wermuth & Schuh, 1999).

ولعلّ هذه الدراسة تأتي استجابة لتلك الدعوة في تناولها "البرهان بدون كلمات" كأسلوبٍ من أساليب البرهان الرياضي، وهو مما يجدر إلقاء الضوء عليه، وتحرّي أدواره، وتقصّي أثر توظيفه في تعلّم الرياضيّات وتعليمها.

ويبدو أن ثمّة ما يربط البرهان الرياضي بالتفكير، إذ تُستخدم طرائق البرهان الرياضي بأنواعها المختلفة في التفكير الرياضي (أبو زينة، ٢٠١٠، خضر، ١٩٨٤، Rips, 1994; Fitting, 1996; Steen, 1999)، وهو ما يستدعي الوقوف على أسلوب البرهان بدون كلمات – الذي تناولته الدراسة- وأثر توظيفه في التفكير الرياضي وفي التحصيل لدى طلبة المرحلة الثانوية.

**هدف الدراسة وأسئلتها**

تهدف الدراسة إلى تقصّي أثر أسلوب "البرهان بدون كلمات" في التفكير الرياضي والتحصيل لدى طلبة الصف الأول الثانوي العلميّ.

وبالتحديد، فقد حاولت الدراسة الإجابة عن السؤال الرئيس الآتي:

"ما أثر استخدام طلبة الصف الأول الثانوي العلمي للبرهان بدون كلمات في تفكيرهم الرياضي وتحصيلهم؟"

وينبثق من هذا السؤال السؤالان الآتيان:

السؤال الأول: " ما أثر استخدام طلبة الصف الأول الثانوي العلمي للبرهان بدون كلمات في تفكيرهم الرياضي؟ "

السؤال الثاني : " ما أثر استخدام طلبة الصف الأول الثانوي العلمي للبرهان بدون كلمات في تحصيلهم؟ "

**الطريقة والإجراءات**

**أفراد الدراسة**

بلغ عدد أفراد الدراسة (١٥٣) طالباً وطالبة من طلبة الصف الأول الثانويّ (الحادي عشر) العلميّ في مدرسة قدري طوقان الثانوية للبنين، ومدرسة كمال جنبلاط الثانوية للبنات، التابعتين لمديرية التربية والتعليم في نابلس. وقد تمّ اختيار شعبتين في كل مدرسة، إحداهما مثّلت

المجموعة التجريبيّة والأخرى مثلت المجموعة الضابطة، وبذلك فقد تشكلت المجموعة التجريبيّة من شعبة للذكور وأخرى للإناث، وكذلك كانت المجموعة الضابطة. وتكوّنت المجموعة التجريبيّة من (٧٦) طالباً وطالبة، بينما تكوّنت المجموعة الضابطة من (٧٧) طالباً وطالبة. ويشير الجدول (١) إلى توزيع أفراد الدراسة وفق متغيري المجموعة والجنس.

**جدول (١):** توزيع أفراد الدراسة وفق متغيري المجموعة والجنس.

| الجنس / المجموعة | ذكور | إناث | المجموع |
|---|---|---|---|
| التجريبيّة | ٣٧ | ٣٩ | ٧٦ |
| الضابطة | ٣٦ | ٤١ | ٧٧ |
| **المجموع** | **٧٣** | **٨٠** | **١٥٣** |

**أدوات الدراسة**

شملت أدوات الدراسة مقياسين هما: الاختبار التحصيلي، واختبار التفكير الرياضي. وفيما يلي عرض لكل منهما:

**١. الاختبار التحصيلي**

تمَّ إعداد اختبار تحصيلي من نوع الاختيار من متعّدد (٤ بدائل)؛ لقياس مستوى تحصيل الطلبة للمحتوى العلمي الذي تضمّنته موضوعات وحدة "المتتاليات والمتسلسلات" من كتاب الرياضيات للصف الأول الثانويّ العلميّ، وقد تم تحليل محتوى الوحدة إلى مجموعة المفاهيم والتعميمات والمهارات المرتبطة بها، وقد وُزعت الأسئلة تبعاً للأهمية النسبية لكل موضوع، والتي تمّ تقديرها وفق عدد الحصص الفعليّة اللازمة لتدريس كل موضوع. وقد تمثّلت موضوعات الوحدة، وعدد الأسئلة المقابلة لها مما تضمّنه الاختبار كما يلي :

- مفهوم المتتالية (١).
- مفهوم المتسلسلة (١).
- المتتاليات الحسابية (٣).
- مجموع المتسلسلة الحسابية (٣).
- المتتالية الهندسية (٣).
- المتسلسلة الهندسية المنتهية ومجموعها (٣).
- المتسلسلة الهندسية اللانهائية (٣).
- الاستقراء الرياضي (٣).

ولتحقيق صدق الاختبار، فقد تمَّ عرضه على مجموعة من المحكّمين تمثّلت في (٥) من الأساتذة المتخصّصين في تعليم الرياضيات في جامعة النجاح الوطنية والجامعة الأردنية وجامعة اليرموك، و(٢) من مشرفي الرياضيات في مديرية التربية والتعليم في نابلس، و(٤) من معلّمي ومعلّمات الرياضيات للصف الأول الثانوي العلميّ في مديرية نابلس، وقد أبدى المحكّمون آراءهم ومقترحاتهم وتعديلاتهم بشأن الاختبار من حيث تعديل صياغة عدد من الأسئلة، ورسم الأشكال بوضوح أكبر، حيث آلَ الاختبار بصورته النهائية إلى (٢٠) سؤالاً، يُطبّق في حصة واحدة، وتكون الدرجة النهائية له (٢٠) درجة، وقد عُدِّلَ لاحقاً لأغراض الدراسة ليصبح من (٦٠) درجة، بحيث يكون لكل سؤال (٣) درجات؛ وذلك ليقابل درجات أفراد الدراسة في الرياضيات للفصل الدراسي الأول والتي لها (٦٠) درجة.

وحُسب ثبات الاختبار بطريقة الاتساق الداخلي وفق معادلة ألفا كرونباخ Cronbach Alpha، إذ تمَّ تطبيقه على عينة من طلبة الصف الأول الثانوي العلميّ في مدرستي الكندي الثانوية للبنين، وجمال عبد الناصر للبنات، وهي من خارج عينة الدراسة، وقد بلغ عدد أفرادها (٥٦)، وبلغت قيمة معامل الثبات وفق هذه الطريقة (٠.٨٣).

وفيما يلي أمثلة مما تضمّنته فقرات الاختبار التحصيلي :

- مجموع الخمسة عشر حدّاً الأولى في متسلسلة حسابية، حدّها الأول ٤، وحدّها الخامس عشر ٢٦ هو: أ) ٤٥٠ ب) ٢٢٥ جـ) ١٩٥ د) ٣٠
- مجموع الحدود الأربعة الأولى في متسلسلة هندسية، حدّها الأول ٤٠٠ ، وأساسها ٢، هو: أ) ٦٠٠٠ ب) ٤٠٠٠ جـ) ٦٠٠ د) ٤٠٠

**٢. اختبار التفكير الرياضي**

لأغراض الدراسة، أعدَّ الباحث اختباراً لقياس التفكير الرياضي، وهو اختبار لا منهجيّ، اعتمد الباحث في إعداده على ما تناوله الأدب النظري المرتبط بالرياضيات التربوية في تعريفاته للتفكير الرياضي (Mathematical Thinking) من أنه "تطوير وجهة النظر الرياضية، بالنزوع إلى تطبيق معاني الرياضيات بتجريدها وإجراءاتها، وتطوير الكفاية باستخدام أدواتها لتحقيق فهم البيئة أو النظام" (Schoenfeld, 1992, p.3; Swan & Ridgway, 2001). أو كما عرّفه تربويون من أنه "عملية بحث عن معنى أو فكرة في موقف يرتبط بسياق رياضي، أي أنه تفكير في مجال الرياضيات حيث تتمثل عناصر أو مكوّنات الموقف في أعداد أو رموز أو أشكال أو مفاهيم أو تعميمات رياضية" (أبو زينة، ٢٠١٠، ص٣٨؛ أبو زينة وعبابنة، ٢٠٠٧، ص ٢٧٤).

وقد تناول الاختبار قدرة الطلبة على الاستدلال العددي واكتشاف قاعدة النمط والاستدلال غير اللفظي، وهي مظاهر رئيسة مما يتضمّنه التفكير الرياضي (أبو زينة، ٢٠١٠؛ أبو زينة وعبابنة، ٢٠٠٧)، وهي مما يناسب قدرات الطلبة أفراد الدراسة في هذه المرحلة الدراسية، وذلك كما تشير الدراسات المتخصّصة مما تناول التفكير الرياضي وقياسه

(Kinard & Kozulin, 2008; Stacey, 2007). هذا وقد وضِع في الاعتبار أنه "لمّا كان بالإمكان نمذجة وتمثيل العديد من المواقف والمشكلات بنماذج وتمثيلات رياضية؛ فإن التفكير الرياضي يُعدّ شاملاً لجميع أشكال وأنماط التفكير المختلفة" (أبو زينة، ٢٠١٠، ص٣٨؛ أبو زينة وعبابنة، ٢٠٠٧، ص ٢٧٤).

وقد رجع الباحث في طور إعداده اختبار التفكير الرياضي إلى العديد من الدراسات السابقة، ومواقع إلكترونية لمنظّمات وهيئات متخصّصة في الرياضيات التربوية وتهتم بالتفكير الرياضي وتعليمه وقياسه (NCTM, 2000; Sternberg, 1996; The Math League, 2011; University of Kent-Center for Reasoning, 2011).

وتكوّن اختبار التفكير الرياضي من (١٥) فقرة من نوع الاختيار من متعدّد (٥ بدائل)، ووزِّعت الفقرات بالتساوي (خمس فقرات لكل منها) في ثلاثة أبعاد هي:

- الاستدلال العددي.
- اكتشاف قاعدة النمط.
- الاستدلال غير اللفظي.

ولتحقيق صدق اختبار التفكير الرياضي، فقد تم عرضه على مجموعة من المحكّمين متمثّلة في (٥) من الأساتذة المتخصّصين في تعليم الرياضيات في جامعة النجاح الوطنية والجامعة الأردنية وجامعة اليرموك، و(٢) من مشرفي الرياضيات في مديرية التربية والتعليم في نابلس. وقد أبدى المحكّمون آراءهم ومقترحاتهم وتعديلاتهم فيما يرتبط بأبعاد الاختبار، وبطبيعة الفقرات ضمن بُعدها، ومناسبتها لأفراد الدراسة ضمن مرحلتهم الدراسيّة، وعُدّلت صياغة بعض الفقرات وتغيير عدد من مموهات الأسئلة، وآلَ الاختبار بصورته النهائية إلى (١٥) فقرة، يُطبَّق في حصة واحدة.

وحُسب ثبات الاختبار بطريقتين أولاهما طريقة إعادة الاختبار، حيث تمَّ تطبيقه على عينة من طلبة الصف الأول الثانويّ العلميّ في مدرستي الكندي الثانوية للبنين، وجمال عبد الناصر للبنات، وهي من خارج عينة الدراسة، وقد بلغ عدد أفرادها (٥٦)، وأعيد تطبيقه بفارق زمني

مدّته أسبوعان. وحُسِبَ معامل الارتباط الذي يمثّل قيمة معامل الثبات وفق هذه الطريقة فبلغ (٠.٧٨). وأما الطريقة الثانية لحساب الثبات فكانت بطريقة الاتساق الداخلي وفق معادلة ألفا كرونباخ Cronbach Alpha ، وبلغت قيمة معامل الثبات وفق هذه الطريقة (٠.٨٢)، وبلغت قيم معامل الثبات لأبعاد الاختبار الثلاثة على الترتيب (٠.٧٢، ٠.٧٥، ٠.٧٦).

وفيما يلي أمثلة لفقرة مما تضمّنته فقرات اختبار التفكير الرياضي لكل بُعدٍ من أبعاده الثلاثة:

- **الاستدلال العددي**

الفقرة: لاحظ العلاقات التي تربط بين الأعداد فيما يلي، واستنتج وفقها قيمة س:

| | |
|---|---|
| ٧ | ٤ |
| ٥ | ٦ |

| | |
|---|---|
| ٤٩ | ١٦ |
| ٢٥ | س |

(أ) ٤١ (ب) ٣٦ (ج) ٣٥ (د) ١٨ (هـ) ٣٧

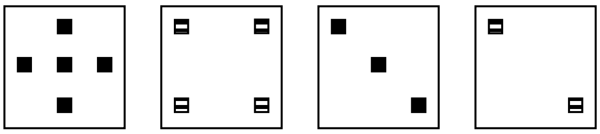
- **اكتشاف قاعدة النمط**

الفقرة: اكتشف قاعدة النمط، وحدّد الرقم الناقص فيما يلي: ٣٣ ، ... ، ١٩، ١٢، ٥

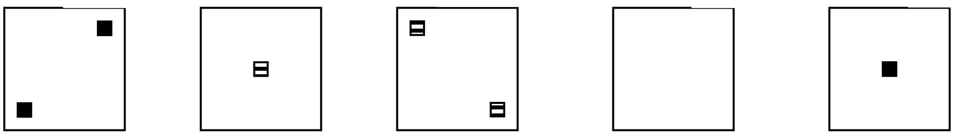
(أ) ٣١ (ب) ٢٦ (ج) ٢٩ (د) ٢٧ (هـ) ٢٤

- **الاستدلال غير اللفظي**

الفقرة: أكمل وفق النمط :



(أ (ب (جـ) (د (هـ)



هذا، وثمّة فارق، تجدر الإشارة إليه بين أداتي الدراسة المتمثلتين بالاختبارين اللذين اعتمدتهما هذه الدراسة، فاختبار التحصيل تناول وحدةً محدّدةً في كتاب الصف الأول الثانويّ العلمي، وهي وحدة "المتتاليات والمتسلسلات"، وجاءت فقراته من واقع هذه الوحدة تحديداً، وقد تحقق له "صدق المحكّمين" في ضوء ذلك. أما اختبار التفكير الرياضي، فهو اختبار لا منهجيّ، له تعريفاته الخاصّة به، والتي تميّزه عن التحصيل الرياضي، ولا يعتمد على وحدة دراسية من أي كتابٍ للرياضيات، بل تناول التفكير الرياضي بأبعادٍ ثلاثة هي: الاستدلال العددي، واكتشاف قاعدة النمط، والاستدلال غير اللفظي.

**إجراءات الدراسة**

مرّت إجراءات الدراسة بالخطوات التالية:

- إعداد دليل المعلّم لتدريس وحدة المتتاليات والمتسلسلات وفق "البرهان بدون كلمات" للمجموعة التجريبيّة، وقد تم اختيار هذه الوحدة ضمن كتاب الصف الأول الثانويّ العلميّ؛ كونها تزخر بالمعرفة والتعميمات التي يمكن صياغتها وفق أسلوب البرهان بدون كلمات، إضافة إلى ما تتمتّع به هذه الوحدة من أهمية خاصة في الرياضيات لطلبة هذه المرحلة. وتضمّن الدليل خططاً للدروس التي غطّتها الوحدة، كما تضمّن المواد والوسائل التي يجدر استخدامها في الحصص الصفية مثل الشفافيات وأجهزة العرض.
- تدريب المعلّمين القائمين على تدريس شعبتي المجموعة التجريبيّة على أسلوب البرهان بدون كلمات، وإرشادهما إلى طريقة التدريس المناسبة وفق دليل المعلّم المعدّ سلفاً.
- تدريس المجموعة التجريبيّة وفق أسلوب البرهان بدون كلمات، و تدريس المجموعة الضابطة وفق الأسلوب الاعتياديّ، إذ قام كل معلّم بتدريس شعبتين في مدرسته، إحداهما مثّلت المجموعة التجريبيّة والأخرى الضابطة.
- استغرق تدريس الوحدة قرابة الأربعة أسابيع، وبعدها طُبّقت اختبارات الدراسة على أفرادها.

هذا وقد تمَّ التأكد من تكافؤ مجموعتي الدراسة التجريبيّة والضابطة في تفكيرهم الرياضي، عبر استخدام اختبار ت t- test لعينتين مستقلتين (Popham & Sirotnik, 1992, pp. 136-139)، وذلك تبعاً لدرجاتهم في اختبار التفكير الرياضي المعدّ لهذه الدراسة، وقد تمَّ تطبيقه قبل البدء بالمعالجة التجريبيّة. والجدول (٢) يبيّن المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية، وقيمة ت لمجموعتي الدراسة التجريبيّة والضابطة في تفكيرهم الرياضي قبليّاً.

**جدول (٢):** المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية وقيمة ت للدرجات القبلية لاختبار التفكير الرياضي.

| المتغيّر | المجموعة | العدد | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري | قيمة ت | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التفكير الرياضي | التجريبيّة | ٧٦ | ١٠.٧ | ٢.٢ | ١.٣ | ٠.١٨٥ |
| | الضابطة | ٧٧ | ١٠.٢ | ٢.٣ | | |

يتّضح من نتائج اختبار ت في الجدول (٢) أن قيمة ت المحسوبة لدرجات الطلبة أفراد الدراسة في اختبار التفكير الرياضي قبلياً بلغت (١.٣)، وهي قيمة ليست دالّة إحصائياً عند مستوى (٠.٠٥)، وهذا يعني عدم وجود فروق دالة إحصائياً بين متوسطات درجات الطلبة في

التفكير الرياضي، باختلاف مجموعتي الدراسة التجريبيّة والضابطة؛ وهو ما يشير إلى تكافؤ المجموعتين في تفكيرهم الرياضي.

**فرضيات الدراسة**

في ضوء سؤالي الدراسة، وتناول الدراسة متغيرين تابعين، هما: التفكير الرياضي، وتحصيل الطلبة في الرياضيات، صيغت الفرضيتان الصفريتان الآتيتان (وهما صفريتان في أسلوبهما؛ لعدم توافر ما يدعم توجيههما في الإطار النظري والدراسات السابقة):

الفرضية الأولى: "لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجات طلبة المجموعة التجريبية ودرجات طلبة المجموعة الضابطة في اختبار التفكير الرياضي".

الفرضية الثانية: لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطي درجات طلبة المجموعة التجريبية ودرجات طلبة المجموعة الضابطة في اختبار التحصيل الرياضي".

**المعالجة الإحصائية**

للإجابة عن السؤال الأول من أسئلة الدراسة؛ أي لبيان الفروق بين متوسطات درجات أفراد الدراسة في اختبار التفكير الرياضي (بأبعاده الثلاثة)، تبعاً لنوع المعالجة (التجريبية والضابطة)، استُخدم تحليل التباين الأحادي متعدّد المتغيرات One way Multivariate Analysis of Variance MANOVA، وذلك باستخدام اختبار "هوتلنج" Hotelling (Bray & Maxwell, 1985; Tatsuoka, 1971).

وقد تلا تحليل التباين متعدّد المتغيرات إجراء تحليل التباين الأحادي Univariate F- test لكلٍ من أبعاد الاختبار الثلاثة؛ وذلك للكشف عن مصادر الفروق الدالة إحصائياً (Bray & Maxwell, 1982).

وللإجابة عن السؤال الثاني، لبيان الفروق بين متوسطات درجات أفراد الدراسة في اختبار التحصيل الرياضي تبعاً لنوع المعالجة (التجريبية والضابطة)، استُخدم تحليل التباين الأحادي المصاحب One way Analysis of Covariance ANCOVA ، حيث مثّلت درجاتهم الفصلية -قبل البدء بالمعالجة- المتغير المصاحب covariate (Kirk, 1995).

**نتائج الدراسة**

للإجابة عن سؤال الدراسة الأول، الذي ينصّ على ما يلي:

"ما أثر استخدام طلبة الصف الأول الثانوي العلميّ للبرهان بدون كلمات في تفكيرهم الرياضي؟".

وكذلك لاختبار صحة فرضية الدراسة الإحصائية "الصفرية" المرتبطة بهذا السؤال، فقد تم استخراج المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات أفراد الدراسة في اختبار التفكير الرياضي بأبعاده الثلاثة والكلي تبعاً لنوع المعالجة؛ وذلك لعرض صورة وصفية عن النتائج. والجدول (٣) يوضّح هذه النتائج.

**جدول (٣):** المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات أفراد الدراسة في اختبار التفكير الرياضي بأبعاده الثلاثة والكلي تبعاً لنوع المعالجة.

| المعالجة | البعد | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري |
|---|---|---|---|
| التجريبية (العدد=٧٦) | الاستدلال العددي | ٤.٠١ | ٠.٧٣ |
| | اكتشاف قاعدة النمط | ٣.٨٥ | ٠.٧٩ |
| | الاستدلال غير اللفظي | ٣.٤٨ | ٠.٩٤ |
| | الكلي | ١١.٣٥ | ٢.٠٨ |
| الضابطة (العدد=٧٧) | الاستدلال العددي | ٣.٦٨ | ٠.٧٨ |
| | اكتشاف قاعدة النمط | ٣.٥٤ | ٠.٨٩ |
| | الاستدلال غير اللفظي | ٣.٢٨ | ٠.٨٨ |
| | الكلي | ١٠.٥٠ | ٢.١٥ |

يلاحظ من الجدول (٣) أن ثمّة اختلافات في المتوسطات الحسابية لدرجات أفراد مجموعتي الدراسة التجريبية والضابطة في اختبار التفكير الرياضي بأبعاده الثلاثة والكلي.

ولمعرفة ما إذا كانت الفروق بين هذه المتوسطات ذات دلالة إحصائية عند مستوى ٠.٠٥، استُخدم تحليل التباين الأحادي متعدّد المتغيرات One Way MANOVA، حسب اختبار هوتلنج Hotelling؛ لمقارنة المتوسطات الحسابية لاختبار التفكير الرياضي بأبعاده الثلاثة تبعاً لنوع المعالجة. ويبيّن الجدول (٤) قيمة هوتلنج ودلالتها الإحصائية باستخدام اختبار ف.

**جدول (٤):** نتائج اختبار هوتلنج (Hotelling) للمقارنة بين متوسطات درجات أفراد الدراسة في التفكير الرياضي بأبعاده الثلاثة ودلالتها الإحصائية.

| قيمة هوتلنج | قيمة ف | درجات الحرية الافتراضية | درجات حرية الخطأ | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|
| ٠.٠٥٧ | ٢.٨٤ | ٣ | ١٤٩ | ٠.٠٤ |

يتّضح من الجدول (٤) الدلالة الإحصائية لقيمة ف المحسوبة. ولتحديد أي بعد من أبعاد التفكير الرياضي أو كلها، قد أسهم في الفروق الإجمالية الدالة إحصائياً، وللكشف كذلك عن مصادر هذه الفروق، استُخدم تحليل التباين الأحادي Univariate F-test، لمقارنة المتوسطات الحسابية لكل بعد من أبعاد اختبار التفكير الرياضي الثلاثة كل على حدة.

والجدول (٥) يبين ملخّصاً لهذه النتائج.

**جدول (٥):** ملخّص نتائج تحليل التباين الأحادي لمقارنة متوسطات المجموعتين التجريبية والضابطة في كل بعد من أبعاد اختبار التفكير الرياضي.

| البعد | مجموع المربعات بين المجموعات | مجموع المربعات للخطأ | وسط المربعات بين المجموعات | وسط المربعات للخطأ | قيمة ف | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الاستدلال العددي | ٤.٠٣٦ | ٨٧.٥٠٦ | ٤.٠٣٦ | ٠.٥٨ | ٦.٩٦٥ | ٠.٠٠٩ |
| اكتشاف قاعدة النمط | ٣.٦٧١ | ١٠٨.٤٩٩ | ٣.٦٧١ | ٠.٧١٩ | ٥.١٠٩ | ٠.٠٢٥ |
| الاستدلال اللفظي | ١.٥٤٧ | ١٢٦.٧٠١ | ١.٥٤٧ | ٠.٨٣٩ | ١.٨٤٤ | ٠.١٧٧ |

يتّضح من قيمة ف المحسوبة في الجدول (٥) وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين المتوسطات الحسابية لأفراد الدراسة تبعاً لبعدي اختبار التفكير الرياضي الأول والثاني وهما بعدا الاستدلال العددي واكتشاف قاعدة النمط، وهو ما يشير إلى أن هذين البعدين قد أسهما في دلالة الفروق الإجمالية. وبالرجوع إلى الجدول (٣)، يتّضح أن هذه الفروق كانت لصالح المجموعة التجريبية، إذ بلغ المتوسط الحسابي لهذين البعدين للمجموعة التجريبية على التوالي (٤.٠١ ، ٣.٨٥)، مقابل المتوسط الحسابي لهذين البعدين للمجموعة الضابطة، البالغ على التوالي (٣.٦٨، ٣.٥٤).

كما أشارت قيمة ف المحسوبة في الجدول (٥) إلى عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين المتوسطات الحسابية لأفراد الدراسة تبعاً للبعد الثالث من اختبار التفكير الرياضي، وهو بعد الاستدلال غير اللفظي، وهو ما يشير إلى أن هذا البعد لم يسهم في دلالة الفروق الإجمالية. ويبدو من الجدول (٣) تقارب المتوسطين الحسابيين لمجموعتي الدراسة التجريبية والضابطة، وقد بلغا على التوالي (٣.٤٨، ٣.٢٨)؛ مما يعزز نتيجة تحليل التباين لهذا البعد.

وفي ضوء نتائج التحليل أعلاه، وما ورد في الجدول (٤)، فإنه يمكن القول برفض فرضية الدراسة الأولى.

وللإجابة عن سؤال الدراسة الثاني، الذي ينصّ على ما يلي:

"ما أثر استخدام طلبة الصف الأول الثانوي العلمي للبرهنة بدون كلمات في تحصيلهم الرياضي؟"،

وكذلك لاختبار صحة فرضية الدراسة "الصفرية" المرتبطة بهذا السؤال، تم استخراج المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات أفراد الدراسة في الرياضيات للفصل

الدراسي الأول ولها (٦٠) درجة، ولدرجاتهم في اختبار التحصيل الرياضي المعدّ لهذه الدراسة، والذي عُدِّل ليكون من (٦٠) درجة، وقد تم تطبيقه بعد إجراء المعالجة التجريبية على مجموعتي الدراسة التجريبية والضابطة. والجدول (٦) يوضّح هذه النتائج.

**جدول (٦):** المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات أفراد الدراسة في الرياضيات للفصل الدراسي الأول وفي الاختبار التحصيلي للمجموعتين التجريبية والضابطة.

| الاختبار | المجموعة | العدد | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري |
|---|---|---|---|---|
| القبليّ (درجات الفصل الأول) | التجريبية | ٧٦ | ٤٢.٦١ | ٩.٢٦ |
| | الضابطة | ٧٧ | ٤٢.٩٣ | ١٠.١١ |
| | الكلي | ١٥٣ | ٤٢.٧٧ | ٩.٦٧ |
| التحصيلي | التجريبية | ٧٦ | ٤٥.٩٧ | ٩.١٢ |
| | الضابطة | ٧٧ | ٤٢.٦٧ | ١٠.٣١ |
| | الكلي | ١٥٣ | ٤٤.٣١ | ٩.٨٥ |

يتّضح من الجدول (٦) وجود فروق ظاهرية بين المتوسطات الحسابية لدرجات الطلبة أفراد الدراسة في المجموعتين التجريبية والضابطة، لاسيّما في الاختبار التحصيلي بعد انتهاء المعالجة. ولتحديد فيما إذا كانت هذه الفروق في المتوسطات الحسابية لدرجات الطلبة أفراد الدراسة على الاختبار التحصيلي في المجموعتين التجريبية والضابطة ذات دلالة إحصائية عند مستوى ٠.٠٥، وبهدف عزل (حذف) الفروق في درجات الطلبة في المتغير المصاحب وأثره (إن وجد)، وهو درجات الطلبة القبلية في الفصل الدراسي الأول، فقد تم استخدام اختبار تحليل التباين الأحادي المصاحب ANCOVA، وكانت النتائج كما هي مبيّنة في الجدول (٧).

**جدول (٧):** نتائج تحليل التباين المصاحب (ANCOVA) لدرجات الطلبة في اختبار التحصيل الرياضي وفقاً لمتغير مجموعة الدراسة.

| مصدر التباين | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط المربعات | قيمة ف | مستوى الدلالة |
|---|---|---|---|---|---|
| المصاحب (القبليّ) | ١٣٤٢٩.٦٥ | ١ | ١٣٤٢٩.٦٥ | ٢٢٢٥.٤ | ٠.٠٠١ |
| المجموعة | ٤٩٧.٢٦ | ١ | ٤٩٧.٢٦ | ٨٢.٤ | ٠.٠٠١ |
| الخطأ | ٩٠٥.١٧ | ١٥٠ | ٦.٠٣ | | |
| **الكلّي** | **٣١٥١٩٨** | **١٥٣** | | | |

يتّضح من الجدول (٧) وجود فرق دالٍ إحصائياً عند مستوى ٠.٠٥ بين متوسطات درجات الطلبة أفراد الدراسة على اختبار التحصيل الرياضي في المجموعة التجريبية التي درست وفق أسلوب البرهان بدون كلمات، والضابطة التي درست وفق الأسلوب الاعتيادي، فقد كانت قيمة ف المحسوبة تساوي (٨٢.٤) وهي دالة إحصائياً عند مستوى الدلالة ٠.٠٠١. ولتحديد قيمة

الفروقات في متوسطات درجات الطلبة في المجموعتين التجريبيتين والضابطة على اختبار التحصيل الرياضي، تم استخراج المتوسطات الحسابية المعدّلة؛ وذلك لعزل أثر المتغير المصاحب (القبلي)، وهو درجات الطلبة في الفصل الدراسي الأول في مجموعتي الدراسة التجريبية والضابطة على أدائهما في اختبار التحصيل الرياضي، وكانت النتائج كما في الجدول (٨).

**جدول (٨):** المتوسطات الحسابية المعدّلة لدرجات الطلبة في المجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار التحصيل الرياضي بعد عزل أثر المتغير المصاحب (القبلي).

| المجموعة | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري |
|---|---|---|
| التجريبية | ٤٦.١٢ | ٠.٢٨٢ |
| الضابطة | ٤٢.٥٢ | ٠.٢٨٠ |

تشير نتائج المتوسطات الحسابية المعدّلة الواردة في الجدول (٨) لدرجات الطلبة في المجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار التحصيل الرياضي بعد عزل أثر تحصيل الطلبة القبلي، إلى أن الفروق كانت لصالح المجموعة التجريبية التي درست وفق أسلوب البرهان بدون كلمات، إذ حصلت على متوسط حسابي معدّلٍ بلغ (٤٦.١٢) درجة، وهو أعلى بدلالة إحصائية من المتوسط الحسابي المعدّل للمجموعة الضابطة التي درست وفق الأسلوب الاعتيادي، والبالغ (٤٢.٥٢).

ولإيجاد فاعلية أسلوب البرهان بدون كلمات، تم إيجاد حجم التأثير effect size باستخدام مربع إيتا Eta squared ، وقد وجِد أنه يساوي (٣٥.٥%)؛ وهو ما يعني أن "البرهان بدون كلمات" يفسّر حوالي ٣٥.٥% من التباين في التحصيل الرياضي المرتبط بوحدة المتتاليات والمتسلسلات في كتاب الرياضيات لدى طلبة الأول الثانوي العلميّ، هذا في الوقت ذاته الذي تشير فيه هذه النتيجة إلى أن الباقي من التباين (٦٤.٥%) غير مفسّر، وقد يرجع إلى عوامل أخرى غير متحكّم بها.

### مناقشة النتائج والتوصيات

بحثت هذه الدراسة أثر أسلوب "البرهان بدون كلمات" في التفكير الرياضي والتحصيل لدى طلبة المرحلة الثانوية. وقد أسفرت نتائج الدراسة عن اختلافات ذات دلالة إحصائية بين المجموعتين التجريبية والضابطة في التفكير الرياضي، جاء لصالح المجموعة التجريبية. وقد أبدت المجموعة التجريبية والتي تناولت توظيف "البرهان بدون كلمات" تفوقاً في التفكير الرياضي، لاسيما ببعديه المتمثلين بالاستدلال العددي واكتشاف قاعدة النمط.

هذا ورغم التصريح بصعوبة البرهان الرياضي -بصفة عامّة- في تعلّم الرياضيات وتعليمها كما جاء لدى العديد من الباحثين (Baker, 1996; Jones, 1997; Webber, 2001, 2006)، إلا أن أسلوب "البرهان بدون كلمات"، وطريقة عرضه التي اعتمدت الأشكال

والمخطّطات البصرية آلت إلى تلك النتيجة بمجملها. ولعلّ هذا يتّفق مع ما أشار إليه باحثون من أن طريقة عرض البرهان والتي اعتمدت الأشكال والمخطّطات دون حواشي المفردات والكلمات، أو ما يطلق عليه "البرهان بدون كلمات"، يمكن لها أن تدعم التفكير والاستدلال الرياضي (Maanen, 2006, p. 97)، وهو يحقق ما ذهب إليه المجلس القومي لمعلّمي الرياضيات القول "أن تناول تمثيلات وعروض مختلفة للخبرة الرياضية قد يطوّر طرقاً مختلفة في التفكير الرياضي" (NCTM, 2000, p. 360)، وهو ما يعني توظيف البرهان بدون كلمات كرافدٍ أو بديلٍ عن الأسلوب التقليدي في تقديم البرهان الرياضي. وقد تشير تلك النتيجة بدورها إلى تلك العلاقة بين البرهان الرياضي والتفكير من ناحية، وتؤكد -في الوقت ذاته- أثر البرهان بطرائقه المختلفة وأساليبه في التفكير الرياضي من ناحية أخرى (أبو زينة، ٢٠١٠ ؛ خضر، ١٩٨٤ ؛ Steen, 1999). ولعلّ نتيجة هذه الدراسة جاءت مدلّلة على هذا الرأي ومؤكدة عليه، وذلك باعتمادها أسلوب "البرهان بدون كلمات" والذي قد بدا أكثر تقبّلاً لدى الطلبة في توظيفهم له واستخدامهم إياه في تعلّمهم الرياضيات من خلال وحدة المتتاليات والمتسلسلات. كما تنسجم نتيجة هذه الدراسة مع رأي مفاده أن دراسة البرهان في الرياضيات يمكن أن "تحسّن" قدرة الطلبة على التفكير (Reid, 2005)، وهي بهذا تحقق ما جاء وبصريح العبارة "أن تعليم التفكير من خلال البرهان الرياضي هو أحد معايير العمليات الرئيسة التي تنادي بها المناهج الدراسية الحالية" (أبو زينة، ٢٠١٠ ، ص ٣٧).

أما ما بدا من أثرٍ لتوظيف أسلوب البرهان بدون كلمات على بعدي الاستدلال العددي واكتشاف قاعدة النمط من أبعاد اختبار التفكير الرياضي على وجه الخصوص، وعدم وجود أثر دال إحصائياً على بعد الاستدلال غير اللفظي، فهو ما يجدر أن يكون محلّ دراسة وبحث، وقد يحتاج إلى مزيدٍ من إلقاء الضوء عليه، وعلى أثر "البرهان بدون كلمات"، أو البرهان الرياضي بعامّة على التفكير الرياضيّ بأبعاده ومظاهره المختلفة. وربما يكون "البرهان بدون كلمات" بمخططاته وعروضه التوضيحيّة وتمثيلاته الرياضية أوقع أثراً على بعدي الاستدلال العددي واكتشاف قاعدة النمط على وجه الخصوص. وعلى أية حال، ولكي يؤدي البرهان دوره الفاعل في التفكير الرياضي، فإن ثمّة من يشير إلى أن البرهان ورغم دوره الرئيس في التفكير الرياضي، إلا أنه ما زال هناك اتفاق ضئيل على كيفية أو توقيت تدريسه، وماهيّة تدريسه، والفئة المستهدفة من تدريسه (Steen, 1999, p. 274). ولعلّ في ذلك دعوة لإجراء المزيد من البحوث والدراسات تتحرّى أدوار البرهان بأساليبه المختلفة ومنها البرهان بدون كلمات في التفكير الرياضي بمظاهره وأبعاده المختلفة.

أما فيما يرتبط بمتغير التحصيل؛ فقد كشفت نتائج الدراسة عن وجود فرق دال إحصائياً بين متوسطات درجات طلبة الصف الأول الثانوي العلميّ أفراد الدراسة على اختبار التحصيل الرياضي في وحدة المتتاليات والمتسلسلات في المجموعتين التجريبية والضابطة، وذلك لصالح أفراد المجموعة التجريبية التي درست وفق أسلوب "البرهان بدون كلمات"، أي أن التدريس المعتمد على أسلوب البرهان بدون كلمات ينجم عنه تحصيل أعلى في موضوعات المتتاليات والمتسلسلات.

ويمكن إلقاء الضوء على هذه النتيجة من خلال ما يمكن قوله بأن أسلوب البرهان بدون كلمات أتاح الفرصة للمعلّم التنويع في الأساليب والإجراءات في تعليم الرياضيات، كما دعا إليها المجلس القومي لمعلّمي الرياضيات (NCTM, 2000)، إذ تمَّ تقديم ما ورد في هذه الوحدة من خلال أسلوب البرهان بدون كلمات -وهو ما يمثّل هنا التنويع في الأساليب والإجراءات- فاعتمد المعلّم على أشكال ومخططات بيانية بدت مُيسِّرة في تعلّم الطلبة لها، وربما اتسمت بالتشويق والإثارة لهم، "فالأشكال والمخططات يمكن لها أن تقوم بأدوار مميّزة في الرياضيات وعبر مراحل الدراسة المختلفة" (Alsina & Nelsen, 2010, p.119;Maanen, 2006, p. 97)، كما أن "الشكل أو المخطط الرياضي الذي يتّسم بالإتقان والتحديد بوسعه أن يحلّ محلَّ ألف كلمة" (Maanen, 2006, p. 97). وعلى أية حال فإن البرهان يبقى أداة أساسية في تطوير وتحفيز الفهم لدى الطلبة في الرياضيات (Ball et al., 2002, p. 1)، وهذا بدوره قد يزيد من تحصيل هؤلاء الطلبة في الرياضيات.

أما عن طريقة عرض البرهان وتدريسه، فإن الأسلوب التقليدي السائد في تدريس البرهان الرياضي قد يثير كثيراً من التحفظات لدى التربويين (Jahnke, 2007, p. 80; Jones, 1997, p. 21)، ولعلّ هذا ما انعكس سلباً على أداء المجموعة الضابطة في تحصيلهم المعرفي لوحدة تراءت فيها براهين التعميمات بوضوح. أضف إلى ذلك أن البرهان بدون كلمات كأسلوب يمكن توظيفه في مناحي مختلفة من المعرفة الرياضية، إذ يمكن استخدامه في برهان النظريات والتعميمات المرتبطة مثلاً بنظرية الأعداد، وحساب المثلثات، والتفاضل والتكامل، والمتباينات، وغيرها من الموضوعات (Alsin & Nelsen, 2010, p. 119).

وعلى أية حال، فإنه ثمّة من الباحثين من يشير إلى أن الحاجة ما زالت قائمة إلى إجراء مزيد من البحث في تدريس البرهان وتحرّي أساليب واستراتيجيات متنوّعةً في تقديمه وعرضه للطلبة، وعبر مراحل الدراسة المختلفة (Ball et al., 2002, p. 2).

وتضمّ هذه الدراسة صوتها، وذلك من خلال ما توصلت إليه من نتائج، إلى هذه الدعوة في إجراء المزيد من البحوث والدراسات تتناول "أسلوب البرهان بدون كلمات" على وجه الخصوص، أو البرهان الرياضي بأساليبه واستراتيجياته المختلفة بعامّة، وتحرّي آثاره في متغيرات مرتبطة بالرياضيات التربوية، أو علاقته بمتغيرات أخرى، وعبر مراحل الدراسة المختلفة.

## المراجع العربية والأجنبية


- إبراهيم، مجدي عزيز. (١٩٨٨). أساليب وطرائق في تدريس الرياضيات. مكتبة الأنجلو المصرية. القاهرة. مصر.

- أبو زينة، فريد. (٢٠١٠). تطوير مناهج الرياضيات المدرسية وتعليمها. دار وائل للنشر. عمّان. الأردن.

- أبو زينة، فريد. وعبابنة، عبد الله. (٢٠٠٧). مناهج تدريس الرياضيات للصفوف الأولى. دار المسيرة للنشر والتوزيع. عمّان. الأردن.
- بل، فريدريك. (١٩٩٤). طرق تدريس الرياضيات. ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان. الدار العربية للنشر والتوزيع. القاهرة. مصر.
- خضر، نظلة. (١٩٨٤). أصول تدريس الرياضيات. عالم الكتب. القاهرة. مصر.
- عبيد، وليم. والمفتي، محمد. وإيليا، سمير. (٢٠٠٠). تربويات الرياضيات. مكتبة الأنجلو المصرية. القاهرة. مصر.
- عفانة، عزّو. (٢٠٠٢). التدريس الاستراتيجي للرياضيات الحديثة. دار حنين. عمّان. الأردن.
- علي، محمد عبد السميع. (١٩٩١). "مهارات البرهان الرياضي لدى معلّمي الرياضيات في الحلقة الثانية من التعليم الأساسي". مجلة كلية التربية في الزقازيق. ١٥ (٦). ١٥١-١٩٠.
- الكرش، محمد أحمد. (١٩٩٩). "أثر تدريس وحدة هندسيّة بمساعدة الكمبيوتر في تحصيل وتنمية مهارات البرهان الرياضي لدى طلاب الصف الأول الثانوي". رسالة الخليج العربي. (٧٠). ١٥-٦٦.
- Almeida, D. (1996). "Justifying and proving in the mathematics classroom". Philosophy of Mathematics Education Newsletter. 9. 1996.
- Alsina, C. & Nelson, R. (2006). Math made visual: Creating images for understanding mathematics. Washington. DC: Mathematical Association of America.
- Alsina, C. & Nelsen, R. (2010). "An invitation to proofs without words". European Journal of Pure and Applied Mathematics. 3(1). 118-127.
- Baker, J. (1996). "Students' difficulties with proof by mathematical induction". Paper presented at the AERA meeting. New York. N.Y.

- Balacheff, N. (1988). "Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics". in Pimm. D. (Ed.). Mathematics. Teachers and Children. London. Hodder and Stoughton.
- Ball, D. L. Hoyles, C. Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). "The Teaching of Proof". Paper presented at the International Congress of Mathematicians". Beijing. China. Volume III. 1-3. 907-920.
- Barile, M. (2011). "Proof without words". From Math World - A Wolfram Web Resource. created by Eric W. Weisstein.
- Bell, A. (1976). "A study of pupils' proof explanations in mathematical situations". Educational Studies in Mathematics. 7. 23-40.
- Blum, W. & Kirsch, A. (1991). "Pre-formal proving: Examples and reflections". Educational Studies in Mathematics. 22(2). 183-203.
- Bray, J. H. & Maxwell, S. E. (1985). Multivariate analysis of variance. Beverly Hills. CA: Sage.
- Bray, J.H. & Maxwell, S.E. (1982). "Analyzing and interpreting significant MANOVAs". Review of Educational Research. 52 (3). 340-367.
- Brown, J. Stillman, G. Schwarz, B. & Kaiser, G. (2008). "The case of mathematical proof in lower secondary school: Knowledge and competencies of pre-service teachers". In M. Goos. R. Brown. & K. Maker (Eds.). Navigating currents and charting directions. (Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia (MERGA). Brisbane. Vol. 1. 85- 91). Adelaide: MERGA.
- Davis, P. & Hersh, R. (1981). The Mathematical Experience. Brighton: Harvester Press.
- Dunham, W. (1994). Mathematical universe. New York: Viking Penguin Inc.

- Duval, R. (1991). “Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration”. Educational Studies in Mathematics. 22. 233-261.
- Fitting, M. A. (1996). Introduction to Geometry. McGraw Hill. New York. NY.
- Gardner, M. (1975). “Mathematical Games”. Scientific American. 233. 112-117.
- Hanna, G. (1989). “Proofs that prove and proofs that explain”. In Proceedings of the Thirteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education. 45-51. Paris.as
- Hanna, G. & de Villiers, M. (2008). “ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education”. ZDM-The International Journal of Mathematics Education. 40(2). 1-8.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). “Students’ proof schemes: Results from exploratory studies”. In A. H. Schoenfeld. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.). Research in collegiate mathematics education. III. 428. Providence. RI: American Mathematical Society.12.
- Jahnke, H. N. (2007). “Proofs and hypotheses”. ZDM-The International Journal of Mathematics Education. 39(1-2). 79-86.
- Jones, K. (1997). “Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof”. Mathematics Education Review. 9. 21-32.
- Khattri, S. (2008). “Proof without words". Teaching Mathematics Applications. 27(4). 220-222.
- Kinard, J. & Kozulin, A. (2008). Rigorous mathematical thinking: Conceptual formation in the mathematics classroom. Cambridge University Press. New York. NY.
- Kirk, R. E. (1995). Experimental design: Procedures for the behavioral sciences. Pacific Grove. CA: Brooks/Cole.

- Knuth, E.J. (2002). “Teachers’ conceptions of proof in the context of secondary school mathematics”. Journal of Mathematics Teacher Education. 5. 61-88.
- Maanen, J. V. (2006). “Diagrams and mathematical reasoning: some points. lines. and figures”. BSHM Bulletin. 21. 97-101.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston VA: Author.
- Nelsen, R. (1993). Proofs without words. Washington: The Mathematics Association of America.
- Nelsen, R. (2000). Proofs without words II: More exercises in visual thinking. Mathematical Association of America.
- Reid, D. (2005). “The meaning of proof in mathematics education”. Paper presented to Working Group 4: Argumentation and Proof. at the Fourth annual conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols. Spain. 17-21 February 2005. Available online at:

  http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/4/Reid.pdf
- Rips, L. J. (1994). The Psychology of proof-deductive reasoning in human thinking. IT-Press. Cambridge. MA.
- Schoenfeld, A. (1992). “Learning to think mathematically”. In D. Grouws (Ed.). Handbook for research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan.
- Stacey, K. (2007). “What is mathematical thinking and why is it important?”. APEC Symposium. Innovative teaching mathematics through lesson study II. 3-4 December 2006.
- Steen, L.A. (1999). “Twenty questions about mathematical reasoning”. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.). Developing mathematical reasoning in grades K-12. 270-285. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Sternberg, R. (1996). “What is mathematical thinking?”. In R. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.). The nature of mathematical thinking. Mahwah (NJ): Erlbaum. 303-318.
- Swan, M. & Ridgway, J. (2001). Assessing Mathematical Thinking: Field-tested Learning Assessment Guide. National Institute for Science Education. University of Wisconsin-Madison.
- Tatsuoka, M. (1971). Multivariate analysis. John Wiley and Sons. New York. NY.
- The Math League. (2011). “Math League Contests”. Available online at: http://www.themathleague.com
- University of Kent-Center of Reasoning. (2011). “Multi-disciplinary research relating to reasoning. inference and method”. Available online at: http://www.kent.ac.uk/secl/researchcentres/reasoning/index.html
- Varghese, T. (2009a). “Concept Maps to Assess Student Teachers’ Understanding of Mathematical Proof”. The Mathematics Educator. 12(1). 49-68.
- Varghese, T. (2009b). “Secondary-level student teachers’ conceptions of mathematical proof”. IUMPST: The Journal. 1.
- Weber, K. (2001). “Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge”. Educational Studies in Mathematics. 48(1). 101-119.
- Weber, K. (2006). “Investigating and Teaching the Processes Used to Construct Proofs”. In F. Hitt. G. Harel & A. Selden (Eds.). Research in Collegiate Mathematics Education. VI. 197-232. American Mathematical Society.
- Wermuth, N. & Schuh, H.-J. (1999). “Proof without words: sum of squared integers”. Student. 3. 41-43.

- Wittmann, E. C. & Muller, N. (1988). "Wann ist ein Beweis ein Beweis?". In P. Bender (Ed.). Mathematikdidaktik-Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich. Winter. 237-258. Berlin: Cornelsen.
- Wu, H. (1996). "The mathematician and the mathematics education reform". Notices of the American Mathematical Society. 43(12). 1531-1537.