ملحق (1)**تحديد الحجم الأمثل من M**

اشتقاق المعادلة رقم 1:

$$Y_t = a * (M_{t-1} * Y_{t-1})^b * ((1 - M_{t-1}) * Y_{t-1})^c \quad (1)$$

دعنا نفترض ان:

$$U = M_{t-1} * Y_{t-1} \quad (2)$$

$$V = (1 - M_{t-1}) * Y_{t-1} \quad (3)$$

وعليه فالمعادلة الاصلية تصبح

$$Y_t = a * U^b * V^c \quad (4)$$

وباشتقاق المعادلة 4 بالنسبة ل M_{t-1} سينتج

$$dY_t/dM_{t-1} = dY_t/dU * dU/dM_{t-1} + dY_t/dV * dV/dM_{t-1} \quad (5)$$

وبما ان V و U هي دوال بدلالة M_{t-1} و Y_t دالة بدلالة U و V ينتج ما يلي

$$dU/dM_{t-1} = Y_{t-1} \quad (5)$$

$$dV/dM_{t-1} = - Y_{t-1} \quad (5'')$$

$$dY_t/dU = a * b * U^{b-1} * V^c \quad (5''')$$

$$dY_t/dU = a * c * U^b * V^{c-1} \quad (5'''')$$

وبتعويض المعادلات السابقة ($5'$, $5''$, $5'''$, $5''''$) في المعادلة 5 ينتج

$$dY_t/dM_{t-1} = a * b * U^{b-1} * V^c * Y_{t-1} - a * c * U^b * V^{c-1} * Y_{t-1}$$

وبتبسيط المعادلة السابقة نحصل على

$$dY_t/dM_{t-1} = a * Y_{t-1} * (b * U^{b-1} * V^c - c * U^b * V^{c-1}) \quad (6)$$

وللتعظيم نساوي المعادلة 6 بالصفر لتصبح

$$a * Y_{t-1} * (b * U^{b-1} * V^c - c * U^b * V^{c-1}) = 0 \quad (7)$$

وبما ان a و Y_{t-1} هي ثوابت ممكن حذفها لتصبح المعادلة

$$(b * U^{b-1} * V^c - c * U^b * V^{c-1}) = 0 \quad (8)$$

وبتقسيم طرفي المعادلة 8 على U^{b-1} و V^{c-1} ينتج

$$b * V - c * U = 0 \quad (9)$$

وبتعويض قيم U و V في المعادلة 9 ينتج

$$b * (1 - M_{t-1}) - c * M_{t-1} = 0 \quad (10)$$

وبحل المعادلة 10 ينتج (وهو المطلوب)

$$M_{t-1} = b / (b + c) \quad (11)$$

وللتأكد من شروط الدرجة الثانية يتم اشتقاق المعادلة 10 بالنسبة ل M_{t-1} ليصبح الناتج

$$-b - c < 0 \quad (12)$$

وهذا يحقق شروط الدرجة الثانية من التعظيم